1. Intégration

a. Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle.
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux (brève extension des propriétés étudiées en première année).
Aucune construction n'est exigible.

b. Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$

Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.

Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée.

c. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.
Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t$. Les étudiants doivent connaître la nature et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ selon le signe de α.

Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
Changement de variable :
si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales (adaptation au cas où φ est strictement décroissante.)

Intégration par parties sur un intervalle quelconque : si f et g sont $\mathcal{C}^1$ et que le crochet $[fg]_{a^+}^{b^-}$ existe, les 2 intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de cv, $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_{a^+}^{b^-} - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$.

d. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.
La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).

Une fonction est dite intégrable sur I intervalle ssi elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.
Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:

- si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$.
- si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$.
- si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.

(Adaptation au cas d'un intervalle quelconque).

2. Révisions de pcsi

a. DL,...

b. Intégration sur un segment

c. ev, applications linéaires

Questions de cours

- Énoncé du th. sur les sommes de Riemann ; application au calcul de $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=3n+1}^{4n}\frac{n}{n^2+(k-3n)^2}$
- Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
- Intégrales de Riemann en $+\infty$ ($\int_1^{\to+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$) (dém.)
- Intégrales de Riemann en 0 ($\int_{\to 0}^{1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$) (dém.)
- Th. de changement de variable (énoncé) appliqué à la cv de $\int_a^{\to b}\frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$
- Th. d'intégration par parties (énoncé) appliqué à la convergence de $\int_1^{\to+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.
- Suites adjacentes (dém du th)
- Les différents « outils » pour étudier l'intégrabilité d'une fonction

Prévisions pour la semaine du 2 au 6 octobre 2023

Intégrales généralisées. Révisions et compléments d'algèbre linéaire.