Espaces vectoriels - Applications linéaires

Tout le cours de pcsi +
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.
Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.
Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.
Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Matrices

Tout le cours de pcsi (plus de matrices échelonnées réduites) +
Matrices définies par blocs, opérations.
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit (les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

Si u et v commutent, le noyau de u est stable par v.
Matrices semblables (révisions de pcsi). (La notion de matrices équivalentes est hors programme.)
Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Questions de cours

- Propriétés de la trace (avec dém)
- Pour un projecteur p, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ (dém)
- Question de synthèse : outils pour montrer que f endomorphisme est bijectif (au moins 10)
- Soit E un e.v. de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{rg}(f) = n$ et $f \circ f = 0$.

  Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
- Définition et caractérisations (3) de la somme directe de 2 sev en dimension finie (avec dém de $E_1 \cap E_2 = \{0\}$)
- Démonstration de la supplémentarité de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{M}_n$.

Prévisions pour la semaine du 14 au 18 octobre 2024

Séries numériques.

2025 PC*

Programme de colle 4.
Du 7 au 11 octobre 2024