Espaces vectoriels - Applications linéaires

Tout le cours de pcsi +
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.
Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.
Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Matrices

Tout le cours de pcsi (plus de matrices échelonnées réduites) +
Matrices définies par blocs, opérations.
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit (les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

Si u et v commutent, le noyau de u est stable par v.
Matrices semblables (révisions de pcsi). (La notion de matrices équivalentes est hors programme.)
Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Définition, polynôme annulateur (application au calcul de l'inverse et des puissances), stabilité de $P(u)$ par u ; $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Questions de cours

- Propriétés de la trace (avec dém)
- Pour un projecteur p, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ (dém)
- Question de synthèse : outils pour montrer que f endomorphisme est bijectif (au moins 10)
- Soit E un e.v. de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{rg}(f) = n$ et $f \circ f = 0$.

  Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
- Définition et caractérisations (3) de la somme directe de 2 sev en dimension finie (avec dém de $E_1 \cap E_2 = \{0\}$)
- Démonstration de la supplémentarité de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{M}_n$.

Prévisions pour la semaine du 17 au 21 octobre 2023

Séries numériques.