1. Normes-Espaces vectoriels normés

N.B. : pour les colleurs, pas de topo pour l'instant.
La notion de normes équivalentes refait son apparition.

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Exemple des normes $1, 2$ et ∞ sur $\mathbb{K}^n$, 1 sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, ∞ sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.
Norme associée à un produit scalaire (révision de Cauchy-Schwarz).
Distance associée à une norme.
Normes équivalentes.
Parties bornées, fonctions bornées.
Suites à valeurs dans un evn E : convergence, suites bornées, opérations sur les suites convergentes, suites extraites, convergence par coordonnées (quand E est de dimension finie). Invariance du caractère borné et de la convergence pour des normes équivalentes.
Limite en un point adhérent pour une fonction de $A \subset E \to F$: définition et caractérisation séquentielle.
Limite et continuité en un point.
Applications lipschitziennes : définition, exemple de la norme, continuité des applications linéaires (pas de norme subordonnée, mais on peut faire trouver la meilleure constante de lipschitz...)
Continuité des applications bilinéaires et polynomiales.

2. Réduction

1. Éléments propres : Révisions

2. Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.
Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.
Un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
Idem pour les matrices + toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (sera revu ultérieurement).
Théorème de Cayley-Hamilton.
u (resp. A) est diagonalisable ssi il (resp. elle) admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
u (resp. A) est diagonalisable ssi $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u (resp. A).

Questions de cours

- Dém « propre » de $\|\cdot\|_\infty$ norme sur $\mathcal{B}(X, E)$ (on pourra admettre l'homogénéité)
- Montrer que $f \in E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t$ est une norme sur E.
- Énoncés des CNS et CS de diagonalisablité + la déf (au moins 7, sans preuve)
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = -1$. Montrer que $\chi_A(X) = X^{n-1}(X+1)$ puis que A est diagonalisable.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme de dérivation $D : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{K}_n[X]$.

Prévisions pour la semaine du 4 au 8 décembre 2023

Réduction (fin). Suites de fonctions.