Suites de fonctions

1. Convergence simple d'une suite de fonctions

2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions

La convergence uniforme entraîne la convergence uniforme sur tout segment qui entraîne la convergence simple.
Révisions : norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Régularité de la limite d'une suite de fonctions

• Transfert par cv U de la continuité d'une suite de fonctions (adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I, ou sur tout intervalle adapté à la situation) ;
• Interversion limite-intégrale sur un segment ;
• Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : (si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers h, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$. (Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.))
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (hypothèse convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I.)
• Théorème de convergence dominée *(dans la pratique, les hyp. de continuité par morceaux n'ont pas à être explicitées, dixit le pgm officiel !)*

Questions de cours

- Convergence simple de (h_n) où $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = n^2 x$ si $|x| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $h_n(x) = \dfrac{1}{x}$ si $|x| > \dfrac{1}{n}$
- Convergence simple de la suite de fonctions (f_n) où $\forall n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.
- Dém du th. d'interversion limite/intégrale sur un segment
- Énoncé du th. de convergence dominée et du th de dérivabilité d'une suite de fonctions. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0,1]$ où $\forall n \geqslant 1,\ f_n : x \in]0,1] \mapsto \dfrac{nx}{nx+1}$.
- *(pour celles et ceux qui ont plus d'ambition)*
  Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq 0$. Trouver un équivalent simple de $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{1+n^2t^2}\mathrm{d}t$

Prévisions pour la semaine du 18 au 22 décembre 2023

Séries de fonctions.