Suites de fonctions

cf programme antérieur.

Révisions : Séries numériques

Séries de fonctions

Différents modes de convergence

Convergences simple, uniforme, normale : définition et caractérisations. Liens entre ces différents modes de convergence.

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Le théorème de la double limite fait son apparition en pc !!! Si a est adhérent à I, si la série de fonctions converge uniformément sur I vers S, si les f_n admettent une limite ℓ_n en a, alors $\sum \ell_n$ converge, S admet une limite en a qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
Intégration terme à terme d'une série de fonctions :
• sur un segment : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$
• sur un intervalle : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Questions de cours

- Dém du th. d'interversion limite/intégrale sur un segment
- Énoncé du th. de convergence dominée et du th de dérivabilité d'une suite de fonctions. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- *(pour celles et ceux qui ont plus d'ambition)*
  Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq 0$. Trouver un équivalent simple de $I_n = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{1+n^2t^2}\mathrm{d}t$
- Tout ce qui concerne la convergence uniforme d'une série de fonctions (au moins 4 points : définition, si cv U alors..., si ... alors cv U)
- Énoncer le téorème d'intégration terme à terme ; en application, montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Énoncer les théorèmes de continuité et de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions ; en application, montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Prévisions pour la semaine du 8 au 12 janvier 2024

Espaces préhilbertiens.