

Révisions : Séries numériques

Séries de fonctions

Différents modes de convergence

Convergences simple, uniforme, normale : définition et caractérisations.
Liens entre ces différents modes de convergence.

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n est continue sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Le théorème de la double limite fait son apparition en pc!!! Si a est adhérent à I , si la série de fonctions converge uniformément sur I vers S , si les f_n admettent une limite ℓ_n en a , alors $\sum \ell_n$ converge, S admet une limite en a

qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions :

- sur un segment : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$

- sur un intervalle : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I . Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur

I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .
Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Préhilbertiens

Reprise complète du cours de sup : produit scalaire, Cauchy-Schwarz, orthogonal d'un sev, procédé d'orthonormalisation de Schmidt, projection sur un sev de dimension finie, calcul de distance à un sev de dimension finie cette semaine.

Questions de cours

- Tout ce qui concerne la convergence uniforme d'une série de fonctions (au moins 4 points : définition, si cv U alors..., si ... alors cv U)
- Énoncer le théorème d'intégration terme à terme ; en application, montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Énoncer les théorèmes de continuité et de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions ; en application, montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Montrer que $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Démonstration de Cauchy-Schwarz + cas d'égalité.
- Vérifier sur un exemple la connaissance du procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
- Distance à un sev de dimension finie (dém du th)
- Démonstration de la supplémentarité de F et F^\perp pour F sev de dimension finie.

Prévisions pour la semaine du 15 au 19 janvier 2024

Début des probas.