Révisions : Séries numériques

Séries de fonctions

Différents modes de convergence

Convergences simple, uniforme, normale : définition et caractérisations.
Liens entre ces différents modes de convergence.

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme : si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Le théorème de la double limite fait son apparition en pc !!! Si a est adhérent à I, si la série de fonctions converge uniformément sur I vers S, si chaque f_n admet une limite ℓ_n en a, alors $\sum \ell_n$ converge, S admet une limite en a qui vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
Intégration terme à terme d'une série de fonctions :
• sur un segment : soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$
• sur un intervalle : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.
Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Préhilbertiens

Reprise complète du cours de sup : produit scalaire, Cauchy-Schwarz, orthogonal d'un sev, procédé d'orthonormalisation de Schmidt, projection sur un sev de dimension finie, calcul de la distance à un sev de dimension finie.

Questions de cours

- Tout ce qui concerne la convergence uniforme d'une série de fonctions (au moins 4 points : définition, si cv U alors..., si ... alors cv U)
- Énoncer le téorème d'intégration terme à terme ; en application, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Énoncer les théorèmes de continuité et de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions ; en application, montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Démonstration de Cauchy-Schwarz + cas d'égalité.
- Vérifier sur un exemple la connaissance du procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
- Distance à un sev de dimension finie (dém du th)
- Démonstration de la supplémentarité de F et $F^\perp$ pour F sev de dimension finie.

Prévisions pour la semaine du 13 au 17 janvier 2025

Début des séries entières.

2025 PC*

Programme de colle 13. Du 6 au 10 janvier 2025