Séries entières

Rayon de convergence d'une série entière

Lemme d'Abel ; déf. du rayon de convergence ($R = \mathrm{Sup}\{\rho \in \mathbb{R}^+ / (a_n \rho^n) \text{ bornée}\}$).
Détermination pratique du rayon de convergence :
D'Alembert pour les séries entières n'est pas au programme, on reviendra systématiquement à d'Alembert pour les séries numériques et on en déduira les rayons « par double inégalité ».
Les raisonnements seront fondés sur

- la définition de R
- $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R \implies \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R \implies (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée} \end{cases}$
- les th usuels relatifs à la cv des séries numériques

En particulier, les considérations suivantes permettent de déterminer le rayon :
Si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $R \geqslant |z_0|$.
Si $(a_n z_0^n)$ est non bornée, alors $R \leqslant |z_0|$.
Si $(a_n z_0^n)$ converge vers 0, alors $R \geqslant |z_0|$.
Si $(a_n z_0^n)$ ne converge pas vers 0, alors $R \leqslant |z_0|$.
Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$.
Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.
Si $\sum a_n z_0^n$ est convergente, mais non absolument convergente, alors $R = |z_0|$.
Rayon obtenu par majoration-comparaison ; rayon d'un produit externe, d'une somme, d'un produit de Cauchy.

Régularité de la somme

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence. On admet la continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence.
L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur $]-R, R[$.
Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

D.S.E. au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Unicité du développement en série entière.
Développements des fonctions usuelles (exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \mathrm{Arctan} x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$).
Les étudiants doivent savoir utiliser une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

Questions de cours

- dém du lemme d'Abel
- définition du rayon de cv ; considérations permettant de déterminer le rayon (au moins 7)
- Formulaire des DSE des fonctions usuelles (avec rayon de convergence)
- Convergence normale de la somme sur tout segment de $]-R, R[$ (dém)
- Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (via $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$)
- Déterminer le développement en série entière de Arccos.
- Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

Prévisions pour la semaine du 27 au 31 janvier 2025

Début des proba de spé.