Révisions

Cours de sup sur les probas : tout (dont les v.a. de sup).

Espaces probabilisés de « spé »

cf programme précédent.

Variables aléatoires discrètes

Généralités

Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$. Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.
Loi d'une variable aléatoire discrète.
V.a.r.d. indépendantes.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Lemme des coalitions.
Suite de variables aléatoires i.i.d.

Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p ($\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$).
Loi de Poisson de paramètre λ.

Couples de v.a.d

Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle sachant un événement.

Espérance/variance

La v.a.r.d. X à valeurs dans un ensemble dénombrable est dite d'espérance finie si la familllle $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathrm{E}(X)$, le réel $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.
Théorème du transfert.
Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance de l'espérance. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.
Si la v.a. X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.
Cas d'une v.a. suivant une loi de Poisson ou une loi géométrique.
Pour a et b réels et X une v.a.d.r., $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.
Inégalité de Markov.
Pas encore de covariance, de BT, de loi faible, de fonction génératrice cette semaine.

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

$E(X) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(X \geqslant n)$.

Questions de cours

- Montrer que la somme de 2 Poisson indépendantes est une Poisson.
- Trouver la loi de $\mathrm{Min}(X,Y)$ où $X \sim Y \sim \mathcal{G}(p)$.
- Calculer $P(X \neq Y)$ où $X \sim Y \sim \mathcal{G}(p)$.
- Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.
- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
- Espérance et variance de la loi géométrique par calcul de somme de séries (sans G_X)

Prévisions pour la semaine du 4 au 8 mars 2024

Attention : pas de colle en pc* la semaine du 4 au 8 mars, pour cause de concours blanc ! On se retrouve la semaine du 11 au 15 mars pour finir les probas et les intégrales dépendant d'un paramètre !