V.A.D

cf pgm précédents... et

Espérance/variance/covariance...

La v.a.r.d. X à valeurs dans un ensemble dénombrable est dite d'espérance finie si la famillle $(xP(X=x)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathrm{E}(X)$, le réel $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$.
Théorème du transfert.
Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance de l'espérance. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.
Si la v.a. X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.
Cas d'une v.a. suivant une loi de Poisson ou une loi géométrique.
Pour a et b réels et X une v.a.d.r., $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite i.i.d. admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathrm{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a $\forall \varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Variance d'une somme finie de v.a. ; cas de v.a. deux à deux indépendantes.
Covariance. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

$E(X) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} P(X \geqslant n)$.

Série génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$.

Le rayon de convergence est au moins égal à 1 ; la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
$\mathrm{E}(X) < +\infty$ ssi G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.
La v.a. X admet une variance ssi G_X est deux fois dérivable en 1.
Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.
Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Intégrales dépendant d'un paramètre discret

Révisions des chapitres antérieurs (cvD, interversion lim et $\displaystyle\int$ sur un segment, intégration terme à terme sur un segment ou sur un intervalle, double limite).

Intégrales dépendant d'un paramètre continu

Théorème de continuité :

Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- il existe une fonction φ positive, intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment (ou autres types d'intervalles adaptés à la situation)de A.

Théorème de dérivation :

Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ positive, intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et on a sur A :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment(ou autres types d'intervalles adaptés à la situation) de A.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème de convergence dominée paramètre discret.

Questions de cours

- Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.
- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, $E(X)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geqslant n)$.
- Espérance et variance de la loi géométrique par calcul de somme de séries (sans G_X)
- Pour la loi géométrique, fonction génératrice, espérance et variance (dém)
- Exo : continuité de la fonction Γ sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Exo : Montrer que $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Prévisions pour la semaine du 18 au 22 mars 2024

Topologie des e.v.n..