V.A.D

cf pgm précédents... et

Espérance/variance/covariance...

La v.a.r.d. X à valeurs dans un ensemble dénombrable est dite d'espérance finie si la famillle $(xP(X=x)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathrm{E}(X)$, le réel $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.

Théorème du transfert.

Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance de l'espérance. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

Si la v.a. X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.

Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$. Écart type $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Cas d'une v.a. suivant une loi de Poisson ou une loi géométrique.

Pour a et b réels et X une v.a.d.r., $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $m=\mathrm{E}(X_1)$ et $\sigma=\sigma(X_1)$, on a $\forall\varepsilon>0$, $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n-m\right|\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Variance d'une somme finie de v.a. ; cas de v.a. deux à deux indépendantes.

Covariance. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

$E(X)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(X\geqslant n)$.

Série génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t)=\mathrm{E}(t^X)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$.

Le rayon de convergence est au moins égal à 1 ; la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.

$\mathrm{E}(X)<+\infty$ ssi G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathrm{E}(X)=G'_X(1)$.

La v.a. X admet une variance ssi G_X est deux fois dérivable en 1.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.

Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Endomorphismes des espaces euclidiens

Isométries vectorielles et matrices orthogonales : définition et les 10 caractérisations au programme...

Détermination des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Écriture complexe d'une rotation.

Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Théorème spectral : un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A=PDP^{-1}$.

Endomorphisme autoadjoint positif (resp. défini positif) : définition ($\forall x,\ \langle u(x),x\rangle\geqslant 0$) et caractérisation ($\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}^+$).

Matrice symétrique positive et définie-positive : définition et caractérisation.

Questions de cours

- Pour la loi géométrique, fonction génératrice, espérance et variance (dém)
- Montrer que u conserve la norme ssi u conserve le produit scalaire ssi u transforme une b.o.n. en une b.o.n.
- Isométries vectorielles et matrices orthogonales : définition et les 10 caractérisations au programme (sans dém)
- Le polynôme caractéristique de S symétrique réelle est scindé sur $\mathbb{R}$ (dém)
- Existence d'une racine carrée pour une matrice symétrique réelle positive.
- Démonstration de S symétrique définie-positive $\iff \mathrm{Sp}(S)\subset\mathbb{R}_*^+$

Prévisions pour la semaine du 17 au 21 mars 2025

Attention : pas de colle en pc* la semaine du 10 au 14 mars,
pour cause de concours blanc ! On se retrouve la semaine du 17 au 21 mars pour les intégrales dépendant d'un paramètre !

2025 PC*

Programme de colle 19. Du 17 au 21 février 2025