## Endomorphismes des espaces euclidiens

cf programme précédent

## Intégrales dépendant d'un paramètre discret

Révisions des chapitres antérieurs (cvD, interversion lim et $\displaystyle\int$ sur un segment, intégration terme à terme sur un segment ou sur un intervalle, double limite).

## Intégrales dépendant d'un paramètre continu

Théorème de continuité :
Si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $A$ ;
- il existe une fonction $\varphi$ positive, intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ ;

alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $A$.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment (ou autres types d'intervalles adaptés à la situation)de $A$.

Théorème de dérivation :
Si $A$ et $I$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $I$ ;
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ ;
- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$ ;
- Il existe une fonction $\varphi$ positive, intégrable sur $I$, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ ;

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$ et on a sur $A$ :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment(ou autres types d'intervalles adaptés à la situation) de $A$.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème de convergence dominée paramètre discret.

## Questions de cours

- Montrer que $u$ conserve la norme ssi $u$ conserve le produit scalaire ssi $u$ transforme une b.o.n. en une b.o.n.
- Isométries vectorielles et matrices orthogonales : définition et les 10 caractérisations au programme (sans dém)
- Le polynôme caractéristique de $S$ symétrique réelle est scindé sur $\mathbb{R}$ (dém)
- Existence d'une racine carrée pour une matrice symétrique réelle positive.
- Démonstration de $S$ symétrique définie-positive $\iff$ $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_*^+$
- Exo : continuité de la fonction $\Gamma$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Exo : en admettant la continuité de la fonction $\Gamma$, limite en 0 de la fonction $\Gamma$.
- Exo : Montrer que $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.
- Exo : Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{Arctan}\frac{t}{x}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
- Exo : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

### *Prévisions pour la semaine du 24 au 28 mars 2025*

Topo. Calcul différentiel.

2025 PC*

Programme de colle 20. Du 17 au 21 mars 2025