Intégrales dépendant d'un paramètre discret

Révisions des chapitres antérieurs (cvD, interversion lim et $\int$ sur un segment, intégration terme à terme sur un segment ou sur un intervalle, double limite).

Intégrales dépendant d'un paramètre continu

Théorème de continuité :
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- il existe une fonction φ positive, intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.
Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment (ou autres types d'intervalles adaptés à la situation)de A.

Théorème de dérivation :
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ positive, intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et on a sur A :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment(ou autres types d'intervalles adaptés à la situation) de A.
Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème de convergence dominée paramètre discret.

Topologie d'un e.v.n.

Révisions du chapitre sur les normes.
Définition des boules (ouverte, fermée), sphère, d'une partie convexe.
Définition (par les suites) d'un fermé ; définition d'un ouvert (= complémentaire d'un fermé), caractérisation à l'aide des boules.
L'image réciporque d'un fermé (resp. d'un ouvert) par une application continue est un fermé (resp. un ouvert).
Définition d'une partie dense.
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dérivabilité en un point.
Dérivabilité sur un intervalle. Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un.
Traduction par les coordonnées dans la base canonique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables.
Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\ldots,f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1,\ldots,f_p$ à valeurs vectorielles. Application au produit scalaire et au déterminant.

Questions de cours

- Exo : continuité de la fonction Γ sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Exo : Montrer que $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
- Soit $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et soit $F = \left\{f \in E \,/\, \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0\right\}$. Montrer que F est un ouvert de E.
- Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Démonstration de la dérivée de $B(f,g)$ où B est bilinéaire, f,g sont dérivables.

Prévisions pour la semaine du 25 au 29 mars 2024

Calcul différentiel.