Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet de cette année proposait l'étude de séries doubles provenant pour certaines d'entre elles, comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n,$$

d'un problème de probabilités associant les nombres de Catalan et le pile ou face infini.

Les polynômes de Hilbert $H_j(X) = \dfrac{1}{j!}X(X-1)...(X-j+1)$ étaient introduits pour l'étude des séries $f_k(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} n^k x^n$.

Deux questions demandaient des codes en Python menant à l'expression polynomiale de $(1-x)^{k+1}f_k(x)$.

Des exemples montraient l'importance des conditions de signe pour la convergence commutative des séries doubles.

Analyse globale des résultats

L'analyse statistique des résultats donne une moyenne correspondant à 21,5 % des points du barème. L'écart type de 12,4 % correspond à une épreuve ayant permis une bonne évaluation de la qualité des candidats. La moyenne relativement basse s'explique largement par la longueur du texte et les nombreuses questions difficiles (**Q7**, **Q9**, **Q10**, **Q11**, **Q14**, **Q16**, **Q21**, **Q23**, **Q38**, **Q39**) demandant aux candidats de concevoir une stratégie, même sommaire, pour ensuite la réaliser. Les meilleures copies n'ont pu qu'approcher 70 % des points prévus.

Le sujet comportait effectivement des questions difficiles dès le début, ce qui a contraint les candidats à ne pas les négliger. Dans de nombreuses questions, le résultat n'était pas donné explicitement. Cela a rendu presque invisible un défaut souvent pointé : des copies produisant des résultats demandés à partir de calculs faux.

Des défauts fréquents dans les copies de cette épreuve concernent la rédaction des récurrences, trop souvent bâclée. Il y a clairement un effort à faire sur ce thème. Une autre erreur très présente cette année est la confusion entre fonction polynomiale et polynôme. Seules quelques rares copies font une distinction rigoureuse.

D'autres manques demandant un effort particulier sont signalés dans notre revue des questions.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I - Utilisation de séries entières

I.A - Une première formule

Beaucoup de copies, pourtant bonnes par ailleurs, ne répondent qu'à une partie de la question lorsque celle-ci comporte plusieurs demandes (ici, le rayon **et** la somme d'une série entière).

Q1. L'égalité $\sum_{n\geqslant 0} x^n = (1-x)^{-1}$ et le rayon de convergence sont très classiques mais on voit tout de même quelques erreurs, comme la fonction logarithme.

Q2. Attention aux erreurs de signe.

Q3. Une itération de l'idée de la question précédente. Notons que le membre de droite $k!(1-x)^{-k-1}$ doit être justifié par un argument de récurrence.

I.B - Utilisation d'une famille de polynômes

Q4. La convergence de la série ne devrait pas poser de difficulté particulière mais de nombreux candidats semblent vouloir s'inspirer de ce qui a précédé, souvent sans succès.

Q5. L'argument des degrés échelonnés (en fait l'inversibilité d'une matrice triangulaire) ne vaut que si on est explicite sur le fait que $\deg(H_j) = j$.

Q6. Une majorité de candidats fait une erreur dans le calcul de $\alpha_{k,0}$ (oubli de $\alpha_{0,0} = 1$). Seules 20 % des copies donnent un traitement satisfaisant de la question.
La question **Q1** « sans justification » devait aussi être comprise comme une incitation à justifier, même brièvement, ce qui est fait dans les autres questions. Ici on demandait autre chose que de simples égalités.

Q7. Une première question qui demandait quelque initiative, essentiellement d'évaluer l'égalité de la question **Q5** en $x \in \mathbb{N}$. Seule une copie sur huit parvient à résoudre la question. Beaucoup tentent une récurrence malgré le fait qu'une relation de récurrence se prouve rarement par récurrence.

Q8. Une majorité de candidats aborde la question. Les codes proposés pour ce problème très simple sont assez satisfaisants malgré l'oubli trop fréquent des conditions initiales lorsqu'on utilise la récursivité. Rappelons aussi que casse et indentation doivent être clairement indiqués. Certains candidats sont sensibles aux problèmes de complexité (version récursive) et proposent parfois des versions itératives avec mémoïsation/programmation dynamique.

Q9. Une question difficile qui a pu dérouter les candidats de par sa place très tôt dans l'énoncé et l'absence d'indication. Elle n'est abordée que par une minorité, les autres candidats sautant souvent alors plusieurs questions.
L'*unicité* d'un polynôme satisfaisant $P_k(x) = (1-x)^{k+1} f_k(x)$ sur l'ensemble infini $]-1,1[$ est souvent oubliée.
Pour le reste, l'existence de $P_k \in \mathbb{R}[X]$ et l'identité demandée pouvaient être séparées mais la bonne idée était ici de montrer cette identité directement par **Q3** et **Q5**. Notons que la relation de récurrence $\alpha_{k+1,j} = j\alpha_{k,j-1} + j\alpha_{k,j}$ (conséquence de $H_j.(X-j) = H_{j+1}.(j+1)$) permet classiquement une solution plus directe de cette question et de la **Q11**.

Q10. Ici beaucoup moins de tentatives, et encore moins de succès, qu'à la question **Q8**. Beaucoup de copies tentent d'abord d'expliciter le coefficient de X^j dans P_k et en cas de réussite partent alors de la formule $\sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i}(-1)^{j-i}\binom{k-i}{j-i}$. Certains candidats ont bien vu qu'une formule moins explicite du type $\sum_{j\geqslant 0}^{k} \alpha_{k,j} \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^i \binom{k-j}{i} X^{i+j}$ pouvait aussi se coder et produire un résultat tout aussi satisfaisant.
Beaucoup d'erreurs proviennent toutefois de ces calculs préliminaires pourtant simples.
Pour ce qui est du code on voit parfois apparaitre une indéterminée X, ce qui en théorie serait possible à définir mais demanderait un travail préparatoire sur les listes d'un autre ordre de difficulté.

Q11. Une question du même niveau de difficulté, élevé, que la **Q9**. Elle est abordée par une majorité de copies dont seul un petit nombre arrive au résultat demandé, le plus souvent en dérivant la relation $P_k = (1-x)^{k+1} f_k$. Un effort payant pour les candidats qui parvenaient à mettre en oeuvre cette idée.

Certaines copies ont établi auparavant la relation bien utile $xf_k'(x) = f_{k+1}(x)$. La possibilité de démontrer et utiliser l'égalité demandée ici comme étape pour **Q9** apparait aussi dans quelques copies.
Pour être complète, la solution de **Q11** devait aussi mentionner que l'égalité de fonctions entrainait une égalité de polynômes.

Q12. Une question apparemment facile, abordée dans la plupart des copies mais avec un taux d'échec assez alarmant. À peine une moitié des candidats produisent un calcul sans erreur.

Q13. Même remarque qu'à la question précédente avec un taux de réussite encore inférieur. La réponse est relativement facile à deviner à partir de la question précédente et a effectivement une valeur, même sans démonstration, puisqu'elle n'est pas donnée par l'énoncé.

Q14. Question difficile demandant un peu d'imagination et pas mal de ténacité. Seules quelques dizaines de copies donnent une démonstration complète.

Q15. Une question bien plus facile mais beaucoup moins tentée après l'échec à la précédente. De plus, la question est souvent mal comprise (confusion avec les coefficients devant les termes $X^j(1-X)^{k-j}$) et mal justifiée (considération des fonctions polynomiales sans passer par les polynômes).

I.C - Une dernière formule

Q16. Le critère de d'Alembert est utilisé avec succès par une courte majorité de copies. Toutefois le calcul qui doit suivre s'avère bien difficile. Le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^a$ ne parait pas assez familier pour que les candidats voient tout de suite qu'il fallait partir du terme de droite de l'égalité demandée.

Q17. L'idée de considérer $g(x) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ et la dérivée de $x \mapsto xg(x)$ ne rend pas la question plus difficile que la précédente, ce qui peut surprendre. Par contre la nécessité de prendre $x \neq 0$ en fin de raisonnement n'est pas toujours clairement affirmée.

Q18. Le produit de Cauchy est utilisé de façon correcte par les candidats qui ont réussi les deux questions précédentes. À x fixé dans $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\setminus \{0\}$ les séries numériques sont absolument convergentes. On peut aussi travailler avec des séries entières à condition de considérer $xg(x)$ comme à la question précédente.

Q19. Ici aussi pour procéder par identification des coefficients de séries entières il convenait de se placer sur un intervalle non vide $]-R, R[$ et donc de dire un mot sur le cas $x = 0$. Beaucoup de copies oublient ce point.

II - Étude de sommes doubles

II.A - Applications

Le rappel du théorème de Fubini dans les cas des séries ne semble pas avoir beaucoup d'influence sur les copies. L'absolue convergence est très rarement invoquée.

Q20. Rappelons que le critère de d'Alembert demande de vérifier que les termes sont non nuls. Rappelons aussi que deux séries à termes équivalents ne sont pas nécessairement similaires quant à leur convergence.

Q21. Même remarque sur le théorème de Fubini trop rarement invoqué et les hypothèses d'absolue convergence.

Q22. Même imprécision concernant la convergence. On voit beaucoup la « recette » consistant à vérifier que n^2u_n tend vers 0 pour en déduire que la série $\sum_n u_n$ converge.

Q23. La question est abordée dans la moitié des copies mais la formulation de la question s'avère un piège redoutable. Majorer efficacement le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(1+k)}$ (par exemple par $\sum_{k=n}^{+\infty} k^{-4}$ puis par une intégrale) s'avère très difficile. On voit aussi ici des équivalents appliqués à des sommes infinies. En appliquant le second théorème rappelé par l'énoncé il convenait bien sûr de sommer d'abord dans $[0, +\infty]$. La force de ce théorème sur les doubles sommes à termes positifs se voit également dans le fait que ce calcul résout aussi rétrospectivement la question précédente. Cette remarque s'appliquerait aussi aux questions **Q20** et **Q21** pour justifier l'absolue convergence.

II.B - Contre-exemples

Q24. Cette question et les deux suivantes promettaient un nouveau départ qui s'est avéré parfois illusoire avec un fort taux d'échec. Le plus souvent on attaque le calcul sans s'assurer que la somme existe.

Q25. Les calculs présentés comportent beaucoup d'erreurs qu'une relecture patiente auraient permis de corriger. L'enjeu devrait être encore plus clair quand le résultat n'est pas donné.

Q26. Notons qu'aucun commentaire n'étant demandé, les correcteurs ne peuvent pas récompenser les copies qui font l'effort de confronter le résultat aux théorèmes rappelés.

Q27. Moins abordée, la question montre les mêmes défauts qu'aux questions **Q24** et **Q25**.

Q28. Ici des erreurs de calcul bien regrettables et parfois un peu de mauvaise foi pour conclure, le résultat étant fourni par l'énoncé.

Q29. Même remarque qu'à la question **Q26**.

III - Probabilités

III.A - Un conditionnement

Q30. Cette partie III.A est abordée dans deux tiers des copies et le vocabulaire probabiliste parait compris.

Q31. Nous avons dit plus tôt que des calculs erronés produisant miraculeusement le bon résultat donnent une bien mauvaise opinion de leur auteur. Mais à l'inverse le candidat qui constate son erreur et la commente même sans la résoudre peut recevoir plus d'indulgence. C'était notamment le cas ici et à la question suivante avec des problèmes de somme commençant à 0 au lieu de 1.

Q32. Les tentatives sérieuses s'amenuisent et la question est réussie par seulement une copie sur dix. L'inversion des symboles $\sum$ est très peu justifiée.

Q33. Encore moins de tentatives, peu de copies allant au bout d'un calcul pourtant simple. Les candidats tentent de justifier a priori la convergence de la série $\sum_k k\mathbb{P}(Y = k)$. Cela malgré le rappel du programme de PC par l'énoncé : pour les familles positives, le calcul peut être effectué dans $[0, +\infty]$ et la finitude de la somme vaut alors preuve de sommabilité.

Q34. Quelques rares candidats résolvent la question.

III.B - Pile ou face infini

Cette partie III.B suscite aussi l'intérêt des deux tiers des candidats mais le profit est bien moindre.

Q35. La coquille de l'énoncé — il fallait lire $X_1 + \cdots + X_{2n}$ au lieu de $X_1 + \cdots + X_n$ — n'a pas paru gêner les candidats qui ont abordé la question. Les correcteurs n'ont pas sanctionné les très rares copies qui faisaient le même lapsus que l'énoncé. La difficulté, légère, résidait plutôt dans la deuxième partie de la question. Les candidats oublient souvent de mentionner l'indépendance pour le résultat ayant trait aux sommes de variables de Bernoulli.

Q36. Ici l'intuition est facile et en général correctement exprimée. Mais trop de candidats pensent qu'il suffit d'affirmer que $B_n \cap B_{n+1} = \emptyset$.

Q37. Une conséquence facile de ce qui précède pour les 20 % de candidats encore présents à ce point de l'énoncé.

Q38. Une question difficile, intéressante mais peu tentée. Des explications souvent confuses (« $A_n = \cup_k B_k \cap A_{n-k}$ » ou variantes) que les correcteurs ont tenté de comprendre avec patience mais qui s'avéraient presque toujours incomplètes.

Q39. La question la moins abordée du problème n'est pas la moins intéressante. Grâce aux séries génératrices des questions **Q16** et **Q17**, on montre que les nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ dénombrent les mots de Dick de longueur $2n$, ici assimilés à des tirages à pile ou face. Notons qu'une démonstration directe par dénombrement est possible en commençant par réécrire $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

Q40. Une question assez facile qui a pu récompenser ceux qui sont allés jusque là. On oublie toutefois trop souvent de vérifier que $0 < p(1-p) < 1/4$.

Q41. Très peu de réussite même si la question est à peine plus difficile que la précédente.

Conclusion

L'épreuve n'a pas révélé de lacune particulièrement grave, ceci sur un énoncé assez élémentaire, il est vrai. Les séries entières sont une notion où les candidats ont généralement une intuition et une expérience réelles. La difficulté des questions importantes résidait essentiellement dans les idées qu'il convenait de trouver pour chaque situation. C'est ce qui a incité les candidats à réfléchir un peu plus longuement que d'habitude avant de rédiger, puis à le faire avec plus de soin. Cela a sans doute aidé à prolonger une amélioration de la rédaction des copies perceptible depuis quelques années.

En conclusion le jury est heureux que cet écrit n'ait pas été une épreuve de pure rapidité mais que les candidats aient pu montrer certaines qualités d'initiative et de réflexion.